# Examen de mathématiques pour les sciences de la Terre, 15 janvier 2008
## 2 hrs, documents autorisés

Tous les exercices sont indépendants les uns des autres.

**Exercise 1 Approximation des différences finies**
Dans cet exercice on démontre l'utilité des différences finies pour obtenir des solutions approchées d'une équation aux dérivées partielles.

1. Une approximation classique de la dérivée seconde pour des points régulièrement espacés de $\delta x$ est
$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) \simeq \frac{f(x+\delta x) - 2f(x) + f(x-\delta x)}{\delta x^2}. \tag{1}$$
Justifier cette approximation.
2. On cherche une solution approchée à l'équation de Poisson unidimensionnelle $\partial_x^2 f = g$ sur l'intervalle $[0,1]$ avec comme conditions aux limites $f(0) = f(1) = 0$. Pour cela, on discrétise les fonctions $g$ et $f$ et on ne cherche les valeurs de cette dernière qu'en trois point $n\delta x, n = 1 \ldots 3$, les valeurs pour $n = 0$ et $n = 4$ étant fixées par les conditions aux limites. Bien entendu, $\delta x = 1/4$. En utilisant l'approximation (1) aux points $n = 1 \ldots 3$, montrer que l'équation de Poisson se met sous une forme matricielle.
3. Inverser la matrice et donner la solution pour les valeurs de $f$. Comparer à la solution analytique pour $g = 1$.

**Exercise 2 Série de Fourier pour la conduction de la chaleur**
On cherche la solution du problème de diffusion

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in ]0,1[ \\ &T(x=0, t>0) = 0, \quad T(x=1, t>0) = 1, \quad T(x \in [0,1], t=0) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

où l'on a choisi les unités pour que la diffusivité thermique soit égale à 1.

1. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction 2-périodique définie par $f(x) = -x$ pour $x \in [-1,1]$.
2. Déterminer la solution en état stationnaire, notée $T_\infty$.
3. La fonction $u = T - T_\infty$ est solution d'un problème de diffusion. Quel est-il ?
4. Pour quelle suite de coefficients $a_n$ la fonction initiale $u_0 \equiv u(t=0)$ peut-elle s'écrire sous la forme
$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x) \tag{3}$$
5. En déduire la solution du problème de diffusion posé initialement.

**Exercise 3 La fonction de courant**

1. Considérons le champ scalaire $\psi(x,y) = x^2 - y^2$. Représenter graphiquement les courbes $\psi(x,y) = cte$ et le champ $\boldsymbol{\nabla}\psi$. Quelle relation existe entre ces deux champs ?

2. Considérons maintenant le champ $\mathbf{u} = (\partial_y \psi, -\partial_x \psi)$. Donner son expression et calculer sa divergence. Représenter ce champ vectoriel sur la même figure que précédemment. Quelle relation existe entre ce champ et ceux représentés précédemment. Pouvez-vous généraliser à d'autres formes de champs scalaire $\psi$ ? Justifier le nom donnée à $\psi$ : la fonction de courant.
3. Calculer le rotationnel de $\mathbf{u}$ (dont la composante sur $z$ est nulle). Exprimer ce champ de manière générale en fonction de $\psi$.

# Correction de l'examen de mathématiques pour les sciences de la Terre, 15 janvier 2008

**Solution 1** 1. Une estimation de la dérivée d'une fonction en $x$, peut être obtenue comme

$$\frac{\partial h}{\partial x} \simeq \frac{h(x+\delta x/2) - h(x-\delta x/2)}{\delta x} \tag{4}$$

et on peut même déterminer la précision d'une telle approximation en utilisant un développement de Taylor. Si on applique cette expression à la dérivée de $f$ on obtient une estimation de sa dérivée seconde. Pour cela il faut estimer la dérivée première aux points milieux et cela s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\simeq \frac{f'(x+\delta x/2) - f'(x-\delta x/2)}{\delta x} \\ &= \frac{1}{\delta x}\left[\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} - \frac{f(x) - f(x-\delta x)}{\delta x}\right] \\ &= \frac{f(x+\delta x) - 2f(x) + f(x-\delta x)}{\delta x^2}\end{aligned} \tag{5}$$

2. Il suffit pour cela d'écrire l'équation de Poisson en chaque point en remplaçant la dérivée seconde par son approximation. En $x = n\delta x$, cela donne, en utilisant les conditions limites et en notant $f_n = f(n\delta x)$

$$\begin{aligned} n=1 &\quad : \quad \frac{1}{\delta x^2}(-2f_2 + f_3) = g_2 \\ n=2 &\quad : \quad \frac{1}{\delta x^2}(f_2 - 2f_3 + f_4) = g_3 \\ n=3 &\quad : \quad \frac{1}{\delta x^2}(f_3 - 2f_4) = g_4 \end{aligned} \tag{6}$$

Ce qui se met évidemment sous forme d'équation matricielle.

3. La résolution du système d'équations donne la matrice inverse et la solution s'écrit

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \delta x^2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Dans le cas où $g = 1$, la solution exacte de l'équation de Poisson est $f(x) = (x^2 - x)/2$ et les valeurs obtenues à partir de la solution approchée, $f_2 = f_4 = -3/32$ et $f_3 = -1/8$ sont exactement correctes.

**Solution 2** 1. La fonction étant impaire, elle ne possède que des termes en sin dans son développement et s'écrit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{2\pi n x}{2}, \qquad a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(\pi n x)dx = (-1)^n \frac{2}{n\pi}. \tag{8}$$

2. La solution stationnaire satisfait $T''_\infty = 0$ et $T_\infty(x=0) = 0, \quad T_\infty(x=1) = 1$. Elle s'écrit donc $T_\infty = x$.

3. L'équation de diffusion est inchangée et seules les conditions initiales et aux limites sont modifiées. Les conditions aux bords sont $u(x = 0, t > 0) = u(x = 1, t > 0) = 0$ et $u(x \in [0, 1], t = 0) \equiv u_0(x) = -x$.
4. La fonction $u_0$ définie sur $[0, 1]$ est la restriction de $f$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Elle s'écrit donc simplement
$$u_0(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(n\pi x). \tag{9}$$
5. Le problème de diffusion étant linéaire, on peut étudier l'évolution de chaque mode de Fourier indépendemment des autres. Si l'on cherche une solution de la forme $h(t) \sin(n\pi x)$, on obtient l'équation suivante pour $h$ :
$$h' = -n^2\pi^2 h \tag{10}$$
et on voit que la solution s'écrit $e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$ qui a le bon goût de satisfaire également les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = 1$. La solution du problème pour $u$ s'écrit donc
$$u = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x) \tag{11}$$
soit pour $T$
$$T = x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x) \tag{12}$$

**Solution 3** 1. Les courbes $\psi(x, y) = cte$ sont des hyperboles ayant pour asymptotes les droites $y = \pm x$. Le champ gradient $\boldsymbol{\nabla}\psi = (2x, -2y)$ est en tout point perpendiculaire aux lignes de $\psi(x, y) = cte$ et pointe vers les valeurs croissantes de $\psi$.

2. $\mathbf{u} = (-2y, -2x)$ a bien sûr une divergence nulle. Ce champ est parallèle en tout point aux courbes $\psi(x, y) = cte$. En effet, on voit tout de suite que $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi = 0$. Ces relations entre les trois champs sont générales pour toute fonction scalaire $\psi$. En effet, $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi = (\partial_y\psi)(\partial_x\psi) - (\partial_x\psi)(\partial_y\psi) = 0$. Pour tout écoulement incompressible $(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u})$ en 2D on peut trouver un champ scalaire $\psi$ pour lequel $\mathbf{u} = (\partial_y\psi, -\partial_x\psi)$. En fait, on peut écrire $\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla} \times (\psi\mathbf{z})$. La propriété de l'écoulement d'être en tout point parallèle aux courbes $\psi(x, y) = cte$ montre que celles-ci sont les lignes de courant de l'écoulement et justifie le nom de fonction de courant.
3. On a $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}(\partial_z\psi) - \nabla^2\psi\mathbf{z} = 0$. Cet écoulement est irrotationnel.