Examen de mathématiques pour les sciences de la Terre
13 janvier 2010
1 hr 30, aucun document autorisé

Chaque exercice est indépendant des autres.

Exercise 1 Principe de Fermat et méthode variationnelle.
L'objectif de cet exercice est de démontrer que les ondes se propagent en ligne droite dans un milieu où la vitesse est uniforme, en utilisant le principe de Fermat.

1. Dans un espace à deux dimensions, on considère une onde se propageant du point A (coordonnées x_A et y_A) au point B (coordonnées $x_B \neq x_A$ et y_B) à une vitesse uniforme v. Pourquoi peut-on écrire la “trajectoire” de l'onde comme une fonction $y(x)$ (un schéma est bienvenu) ? Comment s'écrit mathématiquement le temps de trajet de l'onde entre A et B ? (2 points)
2. Le principe de Fermat stipule que parmi tous les chemins possible de l'onde, celui qui est réalisé donne une valeur extrémale au temps de trajet. Écrire l'équation différentielle que doit satisfaire la fonction $y(x)$ dans ce cas. (3 points)
3. Résoudre cette équation et caractériser la trajectoire. (2 points)

Exercise 2 Relation de Descartes. (3 points).
On admet ici qu'une onde se propage en ligne droite dans un milieu pour lequel la vitesse est constante et on s'intéresse au passage d'un milieu où la vitesse de propagation uniforme est v_1 à un milieu où elle est aussi uniforme, avec une valeur différente, v_2. En utilisant le principe de Fermat, démontrer la relation de Descartes entre les angles d'incidence i_1, i_2 et les vitesses (fig.1).

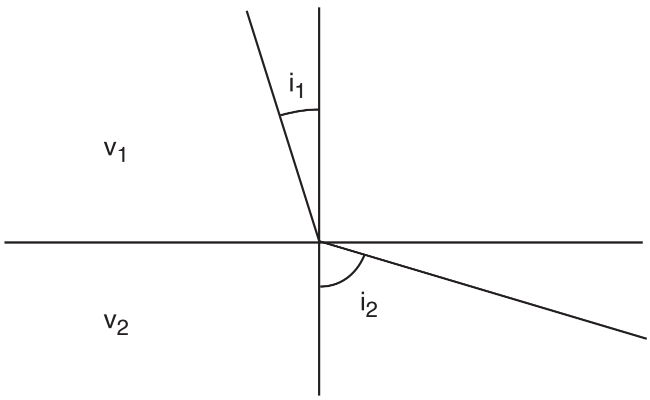

Fig. 1 – Transmission d'une onde au travers d'une discontinuité de vitesse.

Exercise 3 Série de Fourier pour la conduction de la chaleur.
On cherche la solution du problème de diffusion

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in]0,1[\\ &T(x=0, t>0) = 0, \quad T(x=1, t>0) = 1, \quad T(x \in [0,1], t=0) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

où l'on a choisi les unités pour que la diffusivité thermique soit égale à 1.

1. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction 2-périodique définie par $f(x) = -x$ pour $x \in [-1, 1]$. (2 points)

2. Déterminer la solution en état stationnaire, notée T_∞. (1 point)
3. La fonction $u = T - T_\infty$ est solution d'un problème de diffusion. Quel est-il ? (2 points)
4. Pour quelle suite de coefficients a_n la fonction initiale $u_0 \equiv u(t = 0)$ peut-elle s'écrire sous la forme

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x) \tag{2}$$

   (2 points)
5. En déduire la solution du problème de diffusion posé initialement. (3 points)

Correction de l'examen de mathématiques pour les sciences de la Terre, 13 janvier 2010

Solution 1 1. Puisque $x_B \neq x_A$, le chemin le plus simple n'a pas de partie parallèle à l'axe y. Dans le cas où une partie est parallèle à l'axe y, il faut découper le trajet en plusieurs parties, celles qui peuvent être décrites par une fonction $y(x)$ et celles qui peuvent être décrites par une fonction $x(y)$. Pour parcourir un élément de trajectoire dl il faut un temps dl/v et le temps total est de la forme $\int dl/v$. Avec une trajectoire de la forme $y(x)$, on peut écrire $dl = \sqrt{1+y'^2}dx$ et le temps total est donc

$$T = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{v}. \tag{3}$$

2. L'équation d'Euler-Lagrange associée au problème variationnel s'écrit

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \tag{4}$$

avec $F(y, y', x)$ la fonction dont l'intégrale doit être optimisée. Ici, $F = \sqrt{1+y'^2}$ puisque v est une constante. Comme F ne dépend pas explicitement de y, cette équation admet une intégrale :

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C \Leftrightarrow \frac{y'}{1+y'^2} = C \tag{5}$$

avec C une constante.

3. Cette équation peut être inversée pour obtenir y' :

$$y' = \frac{C^2}{1-C^2}. \tag{6}$$

La dérivée est une constante, ce qui signifie que la trajectoire est une droite, la droite reliant les deux points A et B.

Solution 2 On considère une onde se propageant de A, dans le milieu 1, à B, dans le milieu 2. Pour simplifier, on considère que l'axe des x coïncide avec l'interface de discontinuité et les coordonnées des points importants sont (x_A, y_A), (x_B, y_B) et $(x, 0)$ pour le point sur l'interface, noté X. Le temps de propagation entre A et B est décomposé en deux, la partie de A à X puis de X à B :

$$t = \frac{\sqrt{(x-x_A)^2 + y_A^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-x_B)^2 + y_B^2}}{v_2} \tag{7}$$

Selon le principe de Fermat, la valeur de x doit optimiser t, soit

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} = 0 &\Leftrightarrow \frac{x-x_A}{v_1\sqrt{(x-x_A)^2 + y_A^2}} + \frac{x-x_B}{v_2\sqrt{(x-x_B)^2 + y_B^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2} \end{aligned} \tag{8}$$

En effet, le sinus de l'angle d'incidence est bien le rapport entre la projection sur l'axe x et l'hypoténuse et bien sûr les signes de $x - x_A$ et $x - x_B$ sont opposés.

Solution 3 1. La fonction étant impaire, elle ne possède que des termes en sin dans son développement et s'écrit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{2\pi n x}{2}, \qquad a_n = \int_{-1}^{1} f(x) \sin(\pi n x) dx = (-1)^n \frac{2}{n\pi}. \tag{9}$$

2. La solution stationnaire satisfait $T''_\infty = 0$ et $T_\infty(x = 0) = 0, \quad T_\infty(x = 1) = 1$. Elle s'écrit donc $T_\infty = x$.
3. L'équation de diffusion est inchangée et seules les conditions initiales et aux limites sont modifiées. Les conditions aux bords sont $u(x = 0, t > 0) = u(x = 1, t > 0) = 0$ et $u(x \in [0, 1], t = 0) \equiv u_0(x) = -x$.
4. La fonction u_0 définie sur $[0, 1]$ est la restriction de f sur l'intervalle $[0, 1]$. Elle s'écrit donc simplement

$$u_0(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(n\pi x). \tag{10}$$

5. Le problème de diffusion étant linéaire, on peut étudier l'évolution de chaque mode de Fourier indépendemment des autres. Si l'on cherche une solution de la forme $h(t) \sin(n\pi x)$, on obtient l'équation suivante pour h :

$$h' = -n^2 \pi^2 h \tag{11}$$

et on voit que la solution s'écrit $e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$ qui a le bon goût de satisfaire également les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = 1$. La solution du problème pour u s'écrit donc

$$u = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x) \tag{12}$$

soit pour T

$$T = x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x) \tag{13}$$