# LOIS DE PROBABILITÉ

NOTES DE COURS

## 1. Introduction

En théorie des probabilités et en statistique, une loi de probabilité décrit le comportement aléatoire d'un phénomène dépendant du hasard. L'étude des phénomènes aléatoires a commencé avec l'étude des jeux de hasard. Jeux de dés, tirage de boules dans des urnes et jeux de pile ou face ont été des motivations pour comprendre et prévoir les expériences aléatoires. Ces premières approches portent sur des phénomènes discrets, c'est-à-dire dont le nombre de résultats possibles est fini (ou au plus dénombrable). Certaines questions ont cependant fait apparaître des lois à support infini non dénombrable ; par exemple, lorsque le nombre de tirages de pile ou face effectués tend vers l'infini, la répartition du nombre de piles obtenus s'approche d'une loi normale (voir plus loin).

Des fluctuations ou de la variabilité sont présentes dans presque toute valeur qui peut être mesurée lors de l'observation d'un phénomène, quelle que soit sa nature ; de plus, presque toutes les mesures ont une part d'erreur intrinsèque. Les lois de probabilités permettent de modéliser ces incertitudes et de décrire des phénomènes physiques, biologiques, économiques, etc. Le domaine de la statistique permet de trouver des lois de probabilités adaptées aux phénoménes aléatoires.

Il existe beaucoup de lois de probabilités différentes. Parmi toutes ces lois, la loi normale a une importance particulière puisque, d'après le théorème central limite, elle approche le comportement asymptotique de nombreuses lois de probabilités.

Le concept de loi de probabilité se formalise mathématiquement á l'aide de la théorie de la mesure : une loi de probabilité est une mesure, souvent vue comme la loi décrivant le comportement d'une variable aléatoire, discrète ou continue.

## 2. Loi Uniforme

**Loi telle que la densité de probabilité est constante sur l'intervalle des événements.**

Exemple: Le bruit blanc, à l'instar de la lumière blanche qui est un mélange de toutes les couleurs, est composé de toutes les fréquences, chaque fréquence ayant la même énergie.

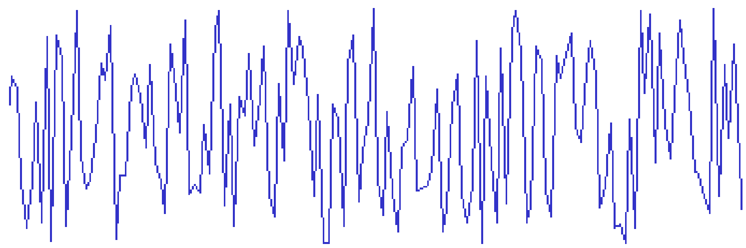

Figure 1. Signal caractéristique du bruit blanc

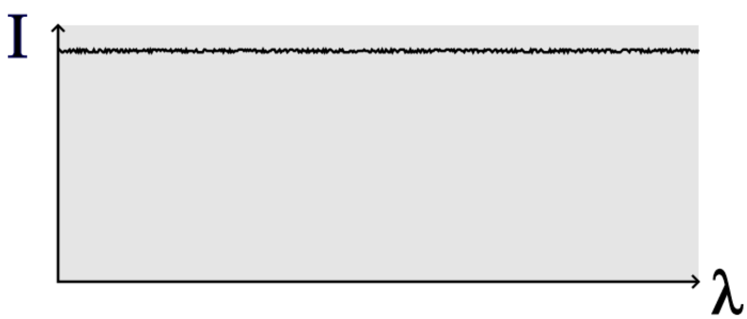


Figure 2. Spectre caractéristique du bruit blanc

## 3. Loi de Bernouilli

**Expérience de Bernouilli: expérience aléatoire qui ne peut prendre que deux résultats (succès ou échec) définie par un paramètre $p$ : probabilté de succès $p$, probabilité d'échec $q = (1 - p)$.**

Exemple: une pièce qu'on lance en l'air. On obtient soit PILE soit FACE. L'expérience de Bernoulli permet de tester si un pièce est bien équilibrée ou pas. Pour ce faire, il faut effectuer $N$ lancés (plus on en fait mieux c'est!), on compte le nombre de FACE obtenu et on calcule la probabilité $p = \frac{k}{N}$. On obtiendra $p$ sensiblement égal à 0.5 si la pièce est équilibrée. Dans ce cas en effet, pour $N \to \infty$, $p$ tend théoriquement vers 0.5.

## 4. Loi Binomiale

**Épreuve binomiale = expérience aléatoire telle que :**

- **On répète n fois la même épreuve de Bernouilli (valeur de p constante),**
- **les épreuves de Bernouilli sont toutes réalisés indépendamment les unes des autres**

$$P(x=k) = \binom{n}{k} p^k \, q^{n-k} \quad \text{avec} \quad \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-\mathrm{k})!\,\mathrm{k}!}$$

Exemple: Lors d'une exploration minière, des géologues prélèvent 35 échantillons de minerai qui, selon l'historique d'exploration, ont la probabilité suivante:

- P[échantillon favorable] = $\frac{1}{4}$
- P[échantillon défavorable] = $\frac{3}{4}$

On peut calculer quelle est la probabilité d'avoir $0 \leq k \leq 35$ échantillons défavorables.
Si on prend $k = 25$:

$$P[25_{\text{defav}}] = \binom{35}{25} \frac{3}{4}^{25} \frac{1}{4}^{10} = 0.132$$

## 5. Loi Géométrique

**Loi de la variable donnant le nombre d'essais nécessaires pour que se produise un événement de probabilité** $p$

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

## 6. Loi Exponentielle

**Loi définie par un paramètre $\lambda$, et qui a la densité de probabilité suivante:**

$$p(x) = \frac{\exp(-x/\lambda)}{\lambda}, \qquad x > 0.$$

Ce type de lois est utilisé pour la décroissance des éléments radioactifs par exemple, où $\lambda$ est la demi-vie.

## 7. Loi de Poisson

**Décrit le comportement du nombre d'événements se produisant dans un laps de temps fixé, si ces événements se produisent avec une fréquence moyenne connue et indépendamment du temps écoulé depuis l'événement précèdent.** Avec $k$ le nombre doccurence, on a:

$$p(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

## 8. Loi de Cauchy

**Une variable aléatoire $X$ suit une loi de Cauchy si elle admet une densité de probabilité $f$ dépendant de 2 paramètres $x_0$ et $a$ telle que:**

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{a}{(x - x_0)^2 + a^2} \right]$$

Attention: pour cette loi de probabilité l'espérance et la variance ne sont pas définies. Pour quelques graphiques: *http://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Cauchy_(probabilités).*

## 9. Loi Normale

**Loi de probabilité qui dépend de deux paramètres $\mu$ et $\sigma^2$. Cette loi est souvent notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. La densité de probabilité est donnée par:**

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left( -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right)$$

**Théorème:** Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors la variable $Y = aX + b$ obéit à la loi $\mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

**Propriété:** Toute transformée affine d'une variable aléatoire suivant une loi normale suit aussi une loi normale.

**Corollaire:** Soit $X$ une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, appelée loi centrée réduite.

Cette loi est extrêmement importante car on la retrouve dans un vaste champ d'applications. Pour plus d'infos: *http://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_normale*

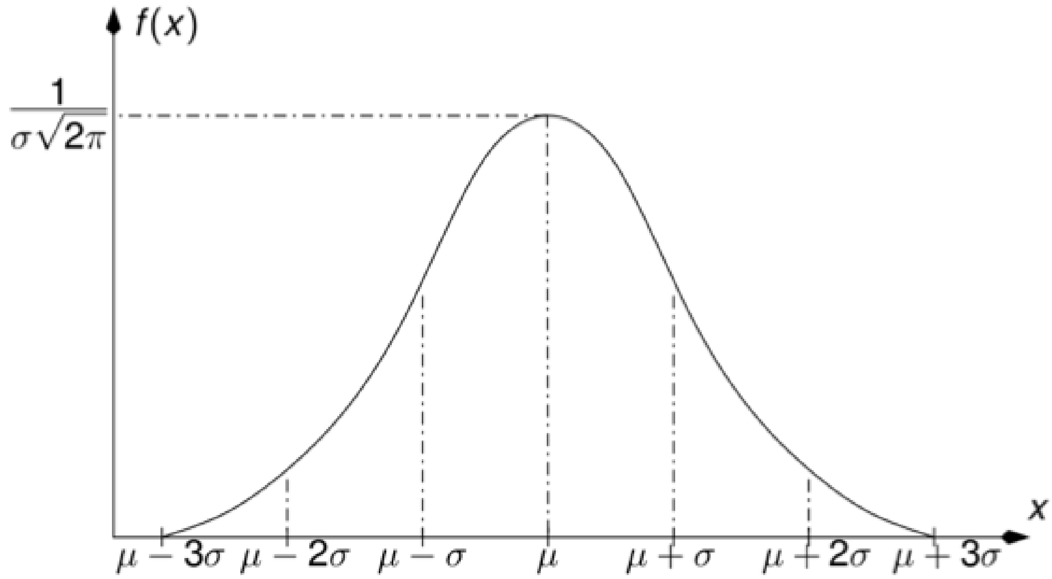


FIGURE 3. Densité de probabilité pour la loi normale

## 10. Théorème de la Limite Centrale

**Soient $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité, suivant la même loi et indépendantes. Soient $\mu$ et $\sigma$ la moyenne et l'écart-type de la loi. Alors la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ tend vers une loi normale quand $n \to \infty$**

## 11. Références


- *Statistique pour les Sciences de la Vie et de l'Environnement*,
  S. Frontier, D. Davoult, V. Gentilhomme, *et al.*, DUNOD.

- http://fr.wikipedia.org/wiki/ *cf.* **Portail:Probabilités et statistiques**.

- http://www-math.univ-poitiers.fr/ phan/downloads/enseignement/lois-usuelles.pdf