EXEMPLE DE TRANSFORMATION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

NICOLÁS CUELLO

1. Enoncé

On dispose d'un générateur de nombres aléatroires avec une distribution uniforme sur $[0,1[$: $f_X(x) = 1$. On veut une loi $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$ sur l'intervalle $[0,1[$ avec $\lambda > 0$ et $y \geq 0$.

Exprimer y en fonction de x.

2. Solution

En utilisant la formule donnée dans le cours, on obtient:

$$f_Y(y) = \frac{dx}{dy} f_X(g^{-1}(y)) = \lambda e^{-\lambda y} \tag{1}$$

$$dx = \lambda e^{-\lambda y} dy = -d(e^{-\lambda y}) \tag{2}$$

On intègre (2) pour obtenir l'expression cherchée:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{y_0}^{y} -d(e^{-\lambda y}) \tag{3}$$

$$x - x_0 = -e^{-\lambda y} + e^{-\lambda y_0} \tag{4}$$

$$e^{-\lambda y} = -x + (x_0 + e^{-\lambda y_0}) \tag{5}$$

On appelle $A = x_0 + e^{-\lambda y_0}$ la constante d'intégration.
Nous avons la condition, $-x + A > 0$. Etant donné que $x \in [0,1[$, on a $A = 1$.

Finalement, en prenant le logarithme:

$$y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x) \tag{6}$$

On remarque que, conformément à l'énoncé, $y \geq 0$.

Date: 8/11/2012.