Physique de la Terre et des planètes. DM 2011.
Rebond post-glaciaire dans un demi-espace infini stratifié.

Le manteau terrestre a une minéralogie stratifiée et la viscosité du manteau inférieur est sans doute différente de celle du manteau supérieur. L'objectif de ce devoir est de calculer une solution au problème du rebond post-glaciaire en prenant en compte une viscosité stratifiée. En dehors de cette structure en viscosité, les approximations faites en cours (demi-espace infini, déformation bi-dimensionnelle, nombre de Reynolds négligeable) sont utilisées.

On considère donc un demi-espace infini compris entre $z = H$ et $z \to -\infty$. La viscosité de la partie supérieure $z > 0$ est égale à η alors que celle de la partie inférieure $z < 0$ est égale à $R\eta$. On calcule la réponse de la Terre (plate) à une pression appliquée à sa surface $z = H$ (due à la redistribution des masses d'eau) suivant la forme

$$P(x,t) = P_0(t)\cos(kx), \tag{1}$$

k étant le nombre d'onde. On cherche notamment à déterminer la forme de la topographie $h(x,t) = H + \delta h(x,t)$. Comme dans le cours, on supposera que $k\delta h(x,t) << 1$, δh étant la perturbation due au rebond.

1. Quels sont les nombres sans dimension du problème.

2. Rappeler la définition de la fonction de courant et donner l'équation qu'elle doit satisfaire dans chacun des domaines. Donner la forme générale des solutions en utilisant une séparation des variables et une forme bien choisie de la dépendance en x.

3. En considérant d'abord le comportement en $z \to -\infty$, expliquer pourquoi six constantes indépendantes sont à déterminer.

4. Écrire les conditions aux limites à satisfaire à la surface et au niveau de la discontinuité de viscosité. Montrer qu'elles fournissent six équations qui permettent de déterminer les six constantes de la question précédente.

5. Représenter la solution pour différentes valeurs des paramètres. Vous utiliserez pour cela le logiciel de votre choix. Un exemple est fourni pour le cas traité en cours avec le logiciel Mathematica. Discuter des solutions obtenues pour des cas extrêmes des paramètres sans dimension du problème.

```
Needs["Graphics`PlotField`"]

f[x_, y_, k_] := (1 - k y) ⅇ^(k y) Sin[k x]
kk = 1;
mx = π / kk;
my = 2 mx;
fcontours =
  ContourPlot[f[x, y, kk], {x, -mx, mx}, {y, -my, 0}, ContourShading → True,
   PlotPoints → 100, Axes → True, PlotRange → {-1, 1}, ColorFunction → Hue,
   DefaultFont → "HELVETICA", DisplayFunction → Identity];
flow = {-D[f[x, y, kk], y], D[f[x, y, kk], x]};
fgradplot = PlotVectorField[flow,
   {x, -mx, mx}, {y, -my, 0}, DisplayFunction → Identity];
Show[fcontours, fgradplot, AxesStyle →
   {{Thickness[.01], Red}, {Thickness[.01], Black}, {Thickness[0.01], Black},
    {Thickness[.01], Black}}, PlotRange -> {{-mx, mx}, {-my, 0}},
  TextStyle → {FontFamily -> "Helvetica", FontSize -> "24"},
  FrameLabel → {"", "y", "x", ""}, DisplayFunction → $DisplayFunction,
  FrameTicks → {{}, {-3 π / (2 kk), -π / kk, -π / (2 kk), 0},
    {-π / kk, -π / (2 kk), 0, π / (2 kk), π / kk}, {}},
  GridLines → {{-π / kk, -π / (2 kk), 0, π / (2 kk), π / kk},
    {-3 π / (2 kk), -π / kk, -π / (2 kk), 0}}];
```