

```
In[1]:= Needs["Graphics`PlotField`"]
```

Forme générale de la solution stratifiée

Les indices 1 sont pour la partie supérieure ($0 < z < H$, viscosité $R \eta$) et les indices 2 pour la partie inférieure ($z < 0$, viscosité $R \eta$)

■ Fonctions solutions de l'équation biharmonique

```
In[2]:= fa[x_, z_, k_] := Sin[k x] e^{k z}
fb[x_, z_, k_] := Sin[k x] z e^{k z}
fc[x_, z_, k_] := Sin[k x] e^{-k z}
fd[x_, z_, k_] := Sin[k x] z e^{-k z}
```

■ Forme des solutions en fonction courant, vitesse, contrainte

```
In[6]:=  $\psi_1[x_, z_, k_] := A_1 fa[x, z, k] + B_1 fb[x, z, k] + C_1 fc[x, z, k] + D_1 fd[x, z, k]$ 
 $\psi_2[x_, z_, k_] := A_2 fa[x, z, k] + B_2 fb[x, z, k]$ 
 $vx_1[x_, z_, k_] := -D[\psi_1[u, w, k], w] /. \{u \rightarrow x, w \rightarrow z\}$ 
 $vz_1[x_, z_, k_] := D[\psi_1[u, w, k], u] /. \{u \rightarrow x, w \rightarrow z\}$ 
 $vx_2[x_, z_, k_] := -D[\psi_2[u, w, k], w] /. \{u \rightarrow x, w \rightarrow z\}$ 
 $vz_2[x_, z_, k_] := D[\psi_2[u, w, k], u] /. \{u \rightarrow x, w \rightarrow z\}$ 
 $\tau_{zz_1}[x_, z_, k_] := 2 \eta D[vz_1[u, w, k], w] /. \{u \rightarrow x, w \rightarrow z\}$ 
 $\tau_{zz_2}[x_, z_, k_] := 2 R \eta D[vz_2[u, w, k], w] /. \{u \rightarrow x, w \rightarrow z\}$ 
 $\tau_{xz_1}[x_, z_, k_] := \eta (D[vz_1[u, w, k], u] + D[vx_1[u, w, k], w]) /. \{u \rightarrow x, w \rightarrow z\}$ 
 $\tau_{xz_2}[x_, z_, k_] := R \eta (D[vz_2[u, w, k], u] + D[vx_2[u, w, k], w]) /. \{u \rightarrow x, w \rightarrow z\}$ 
```

General::spell1 :

Possible spelling error: new symbol name "rxz" is similar to existing symbol "rzz". More...

Calcul de la pression

■ Pression dynamique par intégration de son gradient horizontal, domaine inférieur ($z < 0$)

```
In[90]:= p2[x_, z_, k_] :=  $\int R \eta \text{Simplify}[D[vx_2[X, Z, K], \{Z, 2\}] + D[vx_2[X, Z, K], \{X, 2\}]] dX / .$ 
 $\{X \rightarrow x, Z \rightarrow z, K \rightarrow k\}$ 
p2[
x,
z,
k]
```

```
Out[91]= 2 e^{k z} k R \eta Cos[k x] B_2
```

■ Vérification : gradient vertical de pression dynamique, domaine inférieur ($z < 0$)

```
p2b[x_, z_, k_] :=
  ∫ R η Simplify[D[vz2[X, Z, K], {Z, 2}] + D[vz2[X, Z, K], {X, 2}]] dZ /. {X → x, Z → z, K → k}
  Simplify[p2b[x, z, k] - p2[x, z, k]]
```

Out[97]= 0

■ Pression dynamique par intégration de son gradient horizontal, domaine supérieur ($z > 0$)

In[102]:=

```
p1[x_, z_, k_] :=
  ∫ η Simplify[D[vx1[X, Z, K], {Z, 2}] + D[vx1[X, Z, K], {X, 2}]] dX /. {X → x, Z → z, K → k}
  p1[
    x,
    z,
    k]
```

Out[103]=

$2 e^{-kz} k \eta \cos[kx] (e^{2kz} B_1 + D_1)$

■ Vérification : gradient vertical de pression dynamique, domaine supérieur ($z > 0$)

In[107]:=

```
p1b[x_, z_, k_] :=
  η ∫ Simplify[D[vz1[X, Z, K], {Z, 2}] + D[vz1[X, Z, K], {X, 2}]] dZ /. {X → x, Z → z, K → k}
  Simplify[p1b[x, z, k] - p1[x, z, k]]
```

Out[108]=

0

Conditions aux limites en $z=0$

■ Continuité de v_x

In[109]:=

```
contvx0 = Simplify[ $\frac{vx_1[x, 0, k]}{\sin[kx]} == \frac{vx_2[x, 0, k]}{\sin[kx]}$ ]
```

Out[109]=

$k A_1 + B_1 + D_1 == k A_2 + B_2 + k C_1$

■ Continuité de vz

In[110]:=

$$\text{contvz0} = \text{Simplify}\left[\frac{vz_1[x, 0, k]}{k \cos[kx]} == \frac{vz_2[x, 0, k]}{k \cos[kx]}\right]$$

Out[110]=

$$A_1 + C_1 == A_2$$

■ Continuité de la contrainte verticale totale p - τ_{zz}

In[111]:=

$$\text{contvert0} = \text{Simplify}\left[\frac{p_1[x, 0, k] - \tau_{zz1}[x, 0, k]}{k^2 \eta \cos[kx]} == \frac{p_2[x, 0, k] - \tau_{zz2}[x, 0, k]}{k^2 \eta \cos[kx]}\right]$$

Out[111]=

$$A_1 == R A_2 + C_1$$

■ Continuité de la contrainte tangentielle τ_{xz}

In[112]:=

$$\text{conttan0} = \text{Simplify}\left[\frac{\tau_{xz1}[x, 0, k]}{2 k \eta \sin[kx]} == \frac{\tau_{xz2}[x, 0, k]}{2 k \eta \sin[kx]}\right]$$

Out[112]=

$$k A_1 + B_1 + k C_1 == k R A_2 + R B_2 + D_1$$

Conditions aux limites à la surface $z=H+\delta h(x,t)$

La surface est variable latéralement et temporellement mais on simplifie les équations en utilisant $k\delta h \ll 1$

■ Vitesse horizontale nulle (approximation d'une lithosphère parfaitement rigide)

In[113]:=

$$vxH = \text{Simplify}\left[\frac{vx_1[x, H, k]}{e^{-Hk} \sin[kx]} == 0\right]$$

Out[113]=

$$k (C_1 + H D_1) == e^{2Hk} k A_1 + e^{2Hk} (1 + Hk) B_1 + D_1$$

■ Continuité de la contrainte verticale totale

Il faut bien prendre en compte la pression totale (pas la pression dynamique) et la contrainte visqueuse du côté interne et la pression imposée à la surface $P_0 \cos[kx]$ du côté externe. La topographie est en phase avec la pression imposée : $\delta h = \delta h_0 \cos[kx]$

In[114]:=

$$\text{contvertH} = \text{Simplify}\left[\frac{P_1[x, H, k] - \tau z z_1[x, H, k]}{2 \eta k^2 \text{Cos}[k x]} == \frac{P_0 + \rho g \delta h_0}{2 \eta k^2}\right]$$

Out[114]=

$$e^{-H k} (-e^{2 H k} A_1 - e^{2 H k} H B_1 + C_1 + H D_1) == \frac{P_0 + \rho g \delta h_0}{2 k^2 \eta}$$

Inversion de la matrice des conditions limites

In[115]:=

```
Solution = Simplify[Solve[
  {contvx0, contvz0, contvert0, conttan0, vxH, contvertH}, {A1, B1, C1, D1, A2, B2}]]
```

Out[115]=

$$\left\{ \begin{array}{l} B_2 \rightarrow \frac{e^{H k} ((-1 + 2 H k) (-1 + R) + e^{2 H k} (1 + R)) (P_0 + \rho g \delta h_0)}{k (-(-1 + R)^2 + e^{4 H k} (1 + R)^2 + 4 e^{2 H k} H k (-1 + R^2)) \eta}, \\ A_2 \rightarrow -\frac{e^{H k} ((-1 + H k) (-1 + R) + e^{2 H k} (1 + H k) (1 + R)) (P_0 + \rho g \delta h_0)}{k^2 (-(-1 + R)^2 + e^{4 H k} (1 + R)^2 + 4 e^{2 H k} H k (-1 + R^2)) \eta}, \\ A_1 \rightarrow -\frac{e^{H k} (1 + R) ((-1 + H k) (-1 + R) + e^{2 H k} (1 + H k) (1 + R)) (P_0 + \rho g \delta h_0)}{2 k^2 (-(-1 + R)^2 + e^{4 H k} (1 + R)^2 + 4 e^{2 H k} H k (-1 + R^2)) \eta}, \\ B_1 \rightarrow \frac{e^{H k} (1 + R) ((-1 + 2 H k) (-1 + R) + e^{2 H k} (1 + R)) (P_0 + \rho g \delta h_0)}{2 k (-(-1 + R)^2 + e^{4 H k} (1 + R)^2 + 4 e^{2 H k} H k (-1 + R^2)) \eta}, \\ C_1 \rightarrow \frac{e^{H k} (-1 + R) ((-1 + H k) (-1 + R) + e^{2 H k} (1 + H k) (1 + R)) (P_0 + \rho g \delta h_0)}{2 k^2 (-(-1 + R)^2 + e^{4 H k} (1 + R)^2 + 4 e^{2 H k} H k (-1 + R^2)) \eta}, \\ D_1 \rightarrow \frac{e^{H k} (-1 + R) (1 - R + e^{2 H k} (1 + 2 H k) (1 + R)) (P_0 + \rho g \delta h_0)}{2 k (-(-1 + R)^2 + e^{4 H k} (1 + R)^2 + 4 e^{2 H k} H k (-1 + R^2)) \eta} \end{array} \right\}$$

Solution et représentation graphique

La fonction de courant est rendue sans dimension en la multipliant par $k \eta / (P_0 + \rho g \delta h_0)$.

In[116]:=

```
AA1[kk_, RR_, hh_] := Solution[[1]][[3]][[2]] k η / (P0 + ρ g δ h0) /. {R → RR, k → kk, H → hh}
BB1[kk_, RR_, hh_] := Solution[[1]][[4]][[2]] k η / (P0 + ρ g δ h0) /. {R → RR, k → kk, H → hh}
CC1[kk_, RR_, hh_] := Solution[[1]][[5]][[2]] k η / (P0 + ρ g δ h0) /. {R → RR, k → kk, H → hh}
DD1[kk_, RR_, hh_] := Solution[[1]][[6]][[2]] k η / (P0 + ρ g δ h0) /. {R → RR, k → kk, H → hh}
AA2[kk_, RR_, hh_] := Solution[[1]][[2]][[2]] k η / (P0 + ρ g δ h0) /. {R → RR, k → kk, H → hh}
BB2[kk_, RR_, hh_] := Solution[[1]][[1]][[2]] k η / (P0 + ρ g δ h0) /. {R → RR, k → kk, H → hh}
f1[x_, z_, kk_, RR_, hh_] := ψ1[x, z, kk] /.
  {A1 → AA1[kk, RR, hh], B1 → BB1[kk, RR, hh], C1 → CC1[kk, RR, hh], D1 → DD1[kk, RR, hh]}
f2[x_, z_, kk_, RR_, hh_] := ψ2[x, z, kk] /. {A2 → AA2[kk, RR, hh], B2 → BB2[kk, RR, hh]}
ψ[x_, z_, kk_, RR_, hh_] := If[z > 0, f1[x, z, kk, RR, hh], f2[x, z, kk, RR, hh]]
```

■ Choix des paramètres

On ne s'intéresse ici qu'à la forme de l'écoulement et pas à sa valeur absolue. On n'a donc uniquement besoin de définir la longueur d'onde, l'épaisseur de la couche supérieure (ou d'ailleurs leur rapport, on gardera ici le nombre d'onde égal à 1) et le rapport de viscosité.

```
In[188]:=
kk = 1;
hh = 1;
RR = 30;
mx =  $\pi / \text{kk}$ ;
my = mx;
```

■ Calcul de la figure de contours pour la fonction courant

```
In[193]:=
fcontours =
ContourPlot[ $\psi[x, y, \text{kk}, \text{RR}, \text{hh}]$ , {x, -mx, mx}, {y, -my, hh}, ContourShading → True,
PlotPoints → 100, Axes → True, Contours → 40, ColorFunction → Hue, PlotRange →
{ $\psi[\text{mx}/2, \text{hh}, \text{kk}, \text{RR}, \text{hh}]$ ,  $\psi[-\text{mx}/2, \text{hh}, \text{kk}, \text{RR}, \text{hh}]$ }, ContourLines → False,
DefaultFont → "HELVETICA", DisplayFunction → Identity];
```

■ Calcul de la vitesse et représentation en vecteurs

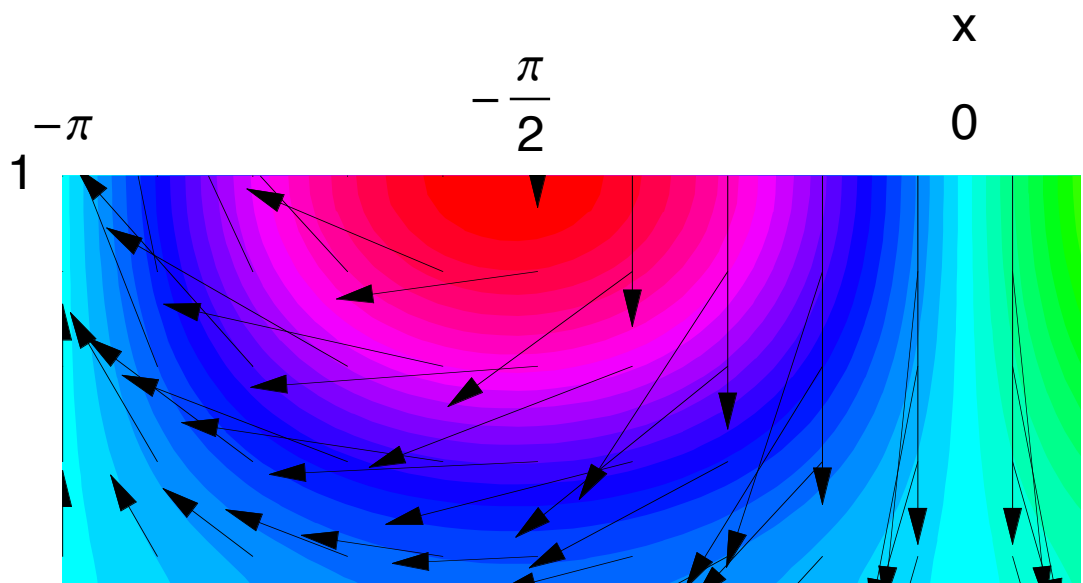
On multiplie par k pour rendre la vitesse sans dimension.

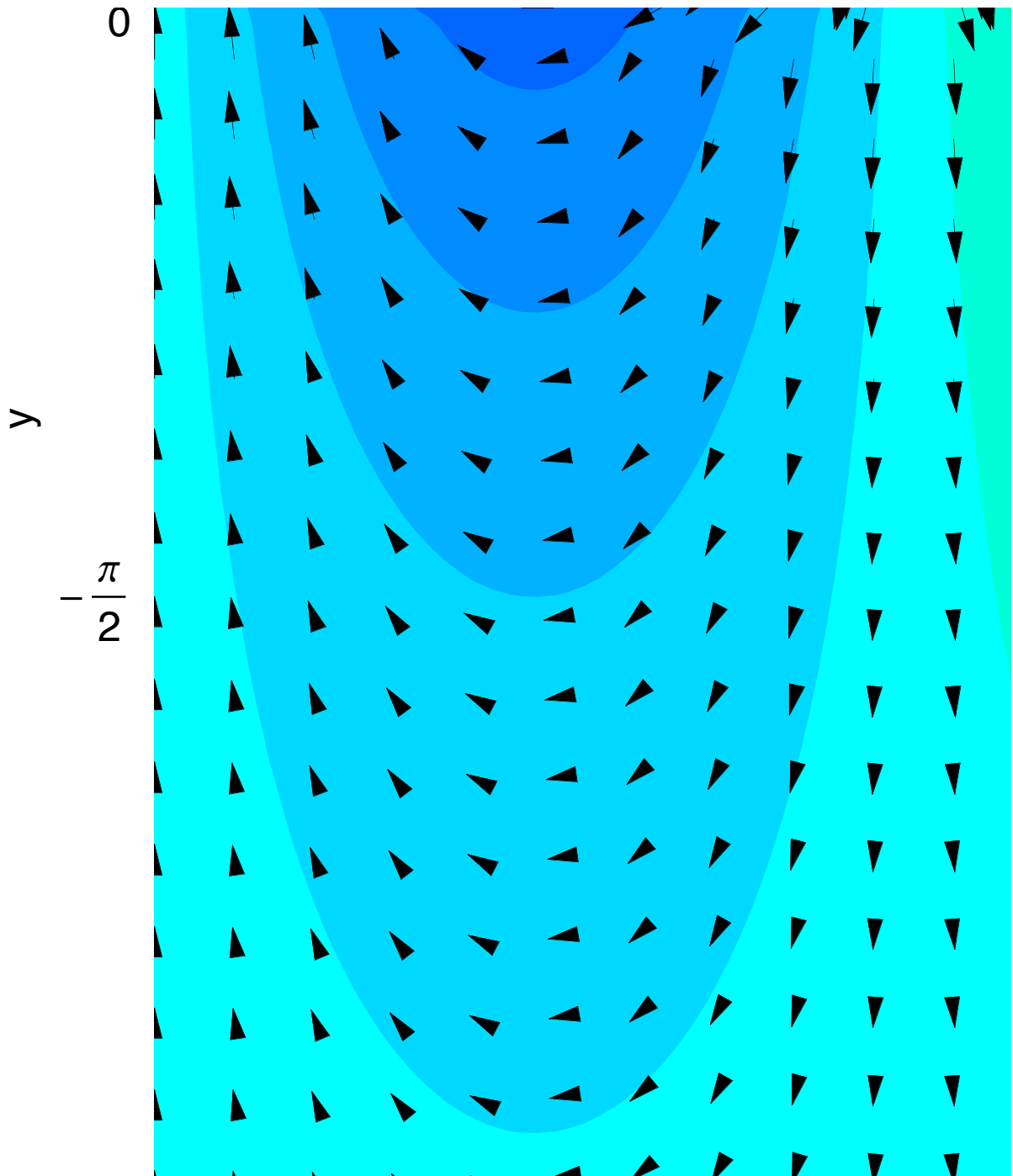
```
In[194]:=
flow = {-D[ $\psi[x, y, \text{kk}, \text{RR}, \text{hh}]$ , y] kk, D[ $\psi[x, y, \text{kk}, \text{RR}, \text{hh}]$ , x] kk};

fgradplot = PlotVectorField[flow, {x, -mx, mx}, {y, -my, hh},
PlotPoints → 20, ScaleFactor → 1, DisplayFunction → Identity];
```

■ Affichage des deux figures superposées

```
In[196]:=
Show[fcontours, fgradplot, AxesStyle →
{{Thickness[.01], Red}, {Thickness[.01], Black}, {Thickness[0.01], Black},
{Thickness[.01], Black}}, PlotRange → {{-mx, mx}, {-my, hh}},
TextStyle → {FontFamily → "Helvetica", FontSize → "24"},
FrameLabel → {"", "y", "x", ""}, DisplayFunction → $DisplayFunction,
FrameTicks → {{}, {-3  $\pi / (2 \text{kk})$ , - $\pi / \text{kk}$ , - $\pi / (2 \text{kk})$ , 0, hh},
{- $\pi / \text{kk}$ , - $\pi / (2 \text{kk})$ , 0,  $\pi / (2 \text{kk})$ ,  $\pi / \text{kk}$ }, {}}, GridLines → Automatic];
```





Conclusion

Des différents calculs en changeant les valeurs de h et R , on tire quelques enseignements. Dans le cas où $k h$ est grand devant 1, la déformation est restreinte à la couche supérieure car la longueur d'onde d'excitation est beaucoup plus courte que l'épaisseur de la couche. La solution est alors similaire à celle d'un demi-espace homogène. Dans le cas où $h k$ est d'ordre 1, si R est grand, le manteau inférieur résiste à la déformation qui est alors restreinte au manteau inférieur. Cet exercice simple (par rapport à la réalité terrestre) permet de comprendre comment la structure en viscosité du manteau peut être déduite des études du rebond post-glaciaire : le signal à différentes longueurs d'ondes est sensible à des épaisseurs variées.